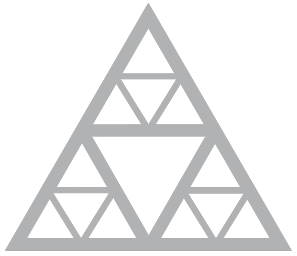
Algorithmique et structures de données

Diviser pour régner

Nicolas Audebert

Mercredi 14 février 2018



École des Ponts
ParisTech

Plan de la séance

Les tris

Il existe de nombreux algorithmes de tris :

- en complexité quadratique $O(n^2)$ (tri à bulles, tri par insertion, tri par sélection...)
- en complexité linéarithmique en moyenne $O(n.log(n))$ (tri rapide)
- en complexité linéarithmique dans le pire cas $O(n.log(n))$ (tri par tas, tri fusion)

Complexité minimale du problème de triage

Dans le cas général, la complexité d'un algorithme de tri est $O(n.log(n))$.

En pratique

En pratique, on utilise le tri rapide (*QuickSort*) car il offre les meilleurs performances et on utilise une contre-mesure pour éviter de se trouver dans le pire cas.

Les tris

Il existe de nombreux algorithmes de tris :

- en complexité quadratique $O(n^2)$ (tri à bulles, tri par insertion, tri par sélection...)
- en complexité linéarithmique en moyenne $O(n.log(n))$ (tri rapide)
- en complexité linéarithmique dans le pire cas $O(n.log(n))$ (tri par tas, tri fusion)

Complexité minimale du problème de triage

Dans le cas général, la complexité d'un algorithme de tri est $O(n.log(n))$.

En pratique

En pratique, on utilise le tri rapide (*QuickSort*) car il offre les meilleurs performances et on utilise une contre-mesure pour éviter de se trouver dans le pire cas.

Les tris

Il existe de nombreux algorithmes de tris :

- en complexité quadratique $O(n^2)$ (tri à bulles, tri par insertion, tri par sélection...)
- en complexité linéarithmique en moyenne $O(n.log(n))$ (tri rapide)
- en complexité linéarithmique dans le pire cas $O(n.log(n))$ (tri par tas, tri fusion)

Complexité minimale du problème de triage

Dans le cas général, la complexité d'un algorithme de tri est $O(n.log(n))$.

En pratique

En pratique, on utilise le tri rapide (*QuickSort*) car il offre les meilleurs performances et on utilise une contre-mesure pour éviter de se trouver dans le pire cas.

Plan de la séance

Divide and Conquer

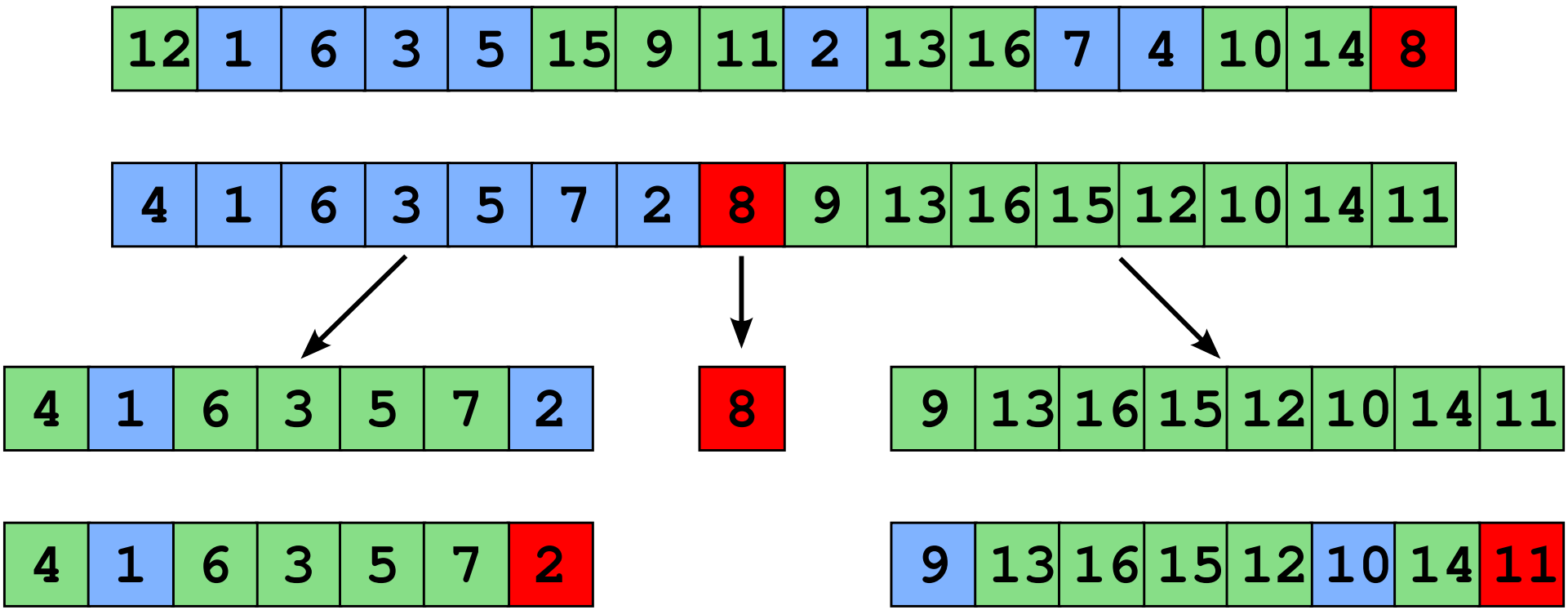
Diviser pour régner

Principe

Diviser un problème en sous-problèmes plus petits, plus faciles à résoudre.

Plan de la séance

Principe - Rappel



QuickSort : complexité

Le parcours du tableau implique $N-1$ comparaison. Puis on réitère l'opération sur chaque moitié de tableau.

En notant i la position du pivot, la complexité s'écrit :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + Moy_i[C_{moy}(i-1) + C_{moy}(N-i)] \quad ,$$

car le tri du tableau de longueur N implique :

- N - 1 comparaisons pour placer le pivot,
- le tri d'un tableau de longueur $i-1$ (à gauche du pivot),
- le tri d'un tableau de longueur $N-i$ (à droite du pivot).

QuickSort : complexité

Le pivot peut se retrouver à n'importe quelle position de façon équiprobable :

$$Moy_i[C_{moy}(i-1) + C_{moy}(N-i)] = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p)$$

En réinjectant dans la complexité moyenne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p) \ .$$

QuickSort : complexité

Le pivot peut se retrouver à n'importe quelle position de façon équiprobable :

$$Moy_i[C_{moy}(i-1) + C_{moy}(N-i)] = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p)$$

En réinjectant dans la complexité moyenne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p) \quad .$$

QuickSort : complexité

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p) \ .$$

Un changement de variable $q = N - p$ dans la seconde somme donne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} C_{moy}(q-1)$$

Autrement dit, la complexité se réécrit :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{2}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1)$$

QuickSort : complexité

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p) \ .$$

Un changement de variable $q = N - p$ dans la seconde somme donne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} C_{moy}(q-1)$$

Autrement dit, la complexité se réécrit :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{2}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1)$$

QuickSort : complexité

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p) \quad .$$

Un changement de variable $q = N - p$ dans la seconde somme donne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) + \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} C_{moy}(q-1)$$

Autrement dit, la complexité se réécrit :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{2}{N}\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1)$$

QuickSort : complexité

En multipliant par N des deux côtés :

$$NC_{moy}(N) = N(N-1) + 2\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) \quad (a)$$

En outre, pour un tableau de taille $N-1$, la relation (a) se réécrit :

$$(N-1)C_{moy}(N-1) = (N-1).(N-2) + 2\sum_{p=1}^{N-1} C_{moy}(p-1) \ . \quad (b)$$

En calculant $(a) - (b)$, il vient :

$$NC_{moy}(N) - (N-1)C_{moy}(N-1) = 2N + 2C_{moy}(N-1) \ .$$

QuickSort : complexité

En multipliant par N des deux côtés :

$$NC_{moy}(N) = N(N-1) + 2\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) \quad (a)$$

En outre, pour un tableau de taille $N-1$, la relation (a) se réécrit :

$$(N-1)C_{moy}(N-1) = (N-1).(N-2) + 2\sum_{p=1}^{N-1} C_{moy}(p-1) \ . \quad (b)$$

En calculant $(a) - (b)$, il vient :

$$NC_{moy}(N) - (N-1)C_{moy}(N-1) = 2N + 2C_{moy}(N-1) \ .$$

QuickSort : complexité

En multipliant par N des deux côtés :

$$NC_{moy}(N) = N(N-1) + 2\sum_{p=1}^{N} C_{moy}(p-1) \quad (a)$$

En outre, pour un tableau de taille $N-1$, la relation (a) se réécrit :

$$(N-1)C_{moy}(N-1) = (N-1).(N-2) + 2\sum_{p=1}^{N-1} C_{moy}(p-1) \ . \quad (b)$$

En calculant $(a) - (b)$, il vient :

$$NC_{moy}(N) - (N-1)C_{moy}(N-1) = 2N + 2C_{moy}(N-1) \ .$$

QuickSort : complexité

En simplifiant :

$$NC_{moy}(N) = 2N + (N+1)C_{moy}(N-1) \quad .$$

On divise par $N(N+1)$:

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C_{moy}(N-1)}{N}$$

Puis par récurrence :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \sum_{k=3}^{N+1} \frac{2}{k} + \frac{C_{moy}(1)}{2}$$

QuickSort : complexité

En simplifiant :

$$NC_{moy}(N) = 2N + (N+1)C_{moy}(N-1) \quad .$$

On divise par $N(N+1)$:

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C_{moy}(N-1)}{N}$$

Puis par récurrence :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \sum_{k=3}^{N+1} \frac{2}{k} + \frac{C_{moy}(1)}{2}$$

QuickSort : complexité

En simplifiant :

$$NC_{moy}(N) = 2N + (N+1)C_{moy}(N-1) \quad .$$

On divise par $N(N+1)$:

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C_{moy}(N-1)}{N}$$

Puis par récurrence :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \sum_{k=3}^{N+1} \frac{2}{k} + \frac{C_{moy}(1)}{2}$$

QuickSort : complexité

Comme :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim_{N\to\infty} log(N)$$

il vient :

$$C_{moy}(N) \sim_{N\to\infty} (N+1)log(N) + (N+1)\frac{C_{moy}(1)}{2}$$

Finalement :

$$C_{moy}(N) = O(N \log(N))$$

QuickSort : complexité

Comme :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim_{N\to\infty} log(N)$$

il vient :

$$C_{moy}(N) \sim_{N\to\infty} (N+1)log(N) + (N+1)\frac{C_{moy}(1)}{2}$$

Finalement :

$$C_{moy}(N) = O(N \log(N))$$

QuickSort : complexité

Comme :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim_{N\to\infty} log(N)$$

il vient :

$$C_{moy}(N) \sim_{N\to\infty} (N+1)log(N) + (N+1)\frac{C_{moy}(1)}{2}$$

Finalement :

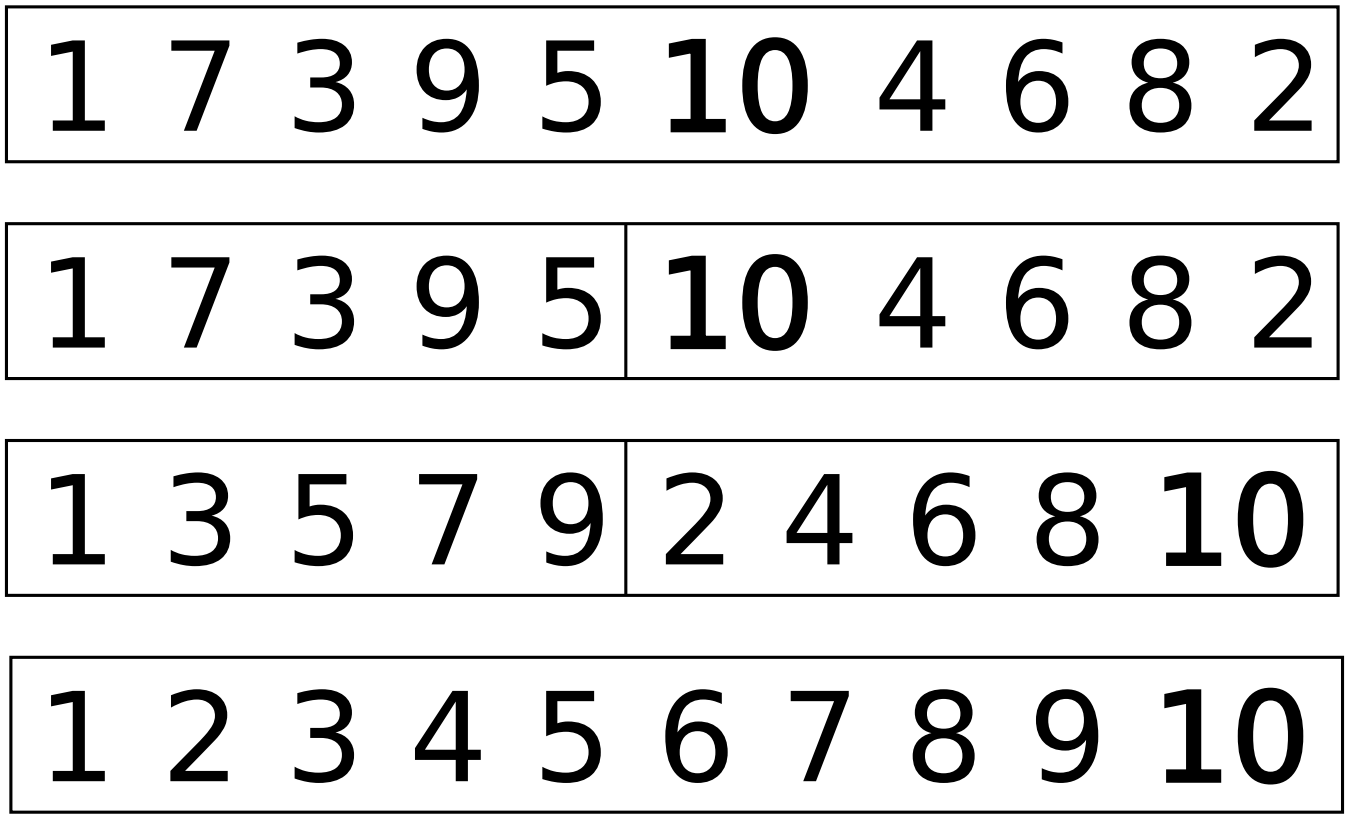
$$C_{moy}(N) = O(N \log(N))$$

Plan de la séance

Tri fusion

Le principe du tri fusion est proche du tri rapide. L'idée est de couper un tableau en deux, de trier chaque moitié du tableau, puis de remplir un nouveau tableau avec les sous-tableaux triés.

Tri fusion



Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique $N-1$ comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne, $i \simeq \frac{N}{2}$:

$$C_N = N + 2 * C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 * C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k * C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après $k = log_2(N)$ étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique $N-1$ comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne, $i \simeq \frac{N}{2}$:

$$C_N = N + 2 * C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 * C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k * C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après $k = log_2(N)$ étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique $N-1$ comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne, $i \simeq \frac{N}{2}$:

$$C_N = N + 2 * C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 * C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k * C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après $k = log_2(N)$ étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique $N-1$ comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne, $i \simeq \frac{N}{2}$:

$$C_N = N + 2 * C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 * C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k * C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après $k = log_2(N)$ étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique $N-1$ comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne, $i \simeq \frac{N}{2}$:

$$C_N = N + 2 * C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 * C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k * C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après $k = log_2(N)$ étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

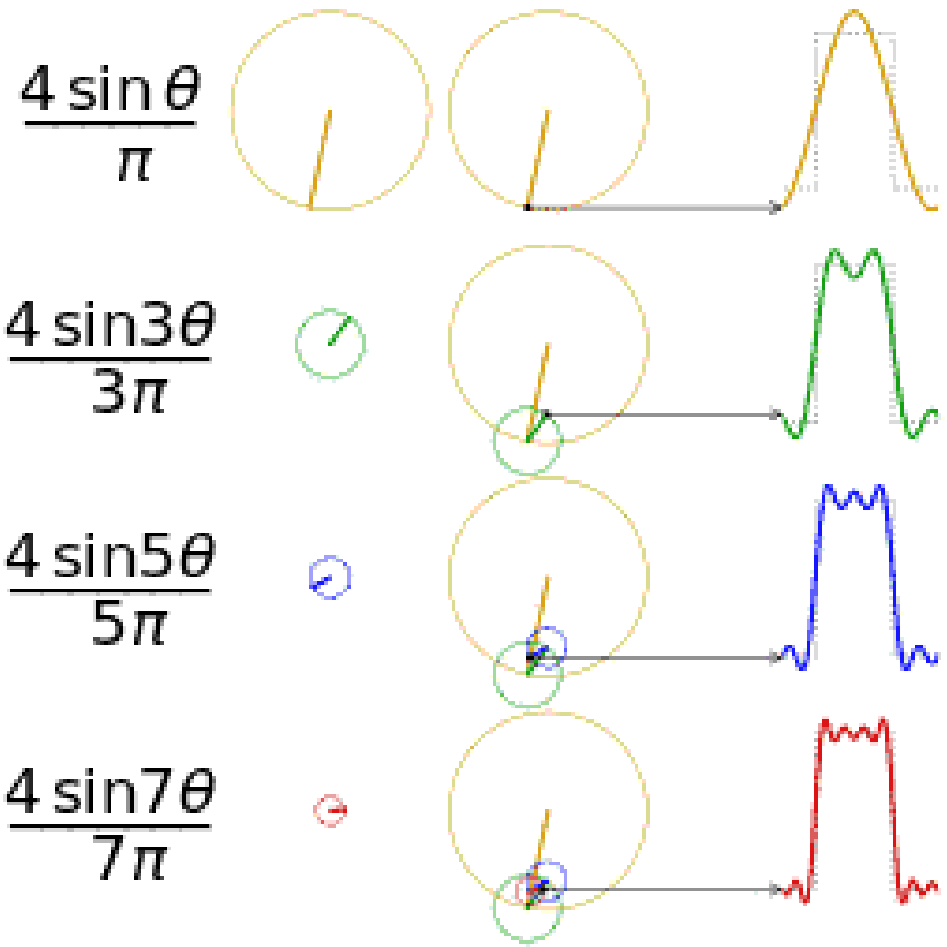
Tri fusion

Le tri fusion est un $O(N \log(N))$ dans tous les cas. Cependant il est en moyenne plus lent que Quicksort, c'est pourquoi ce dernier est le plus utilisé.

Plan de la séance

Discrete Fourier Transform

La Transformée de Fourier discrète est un algorithme important en traitement du signal et des images.



DFT : construction

Soit l'espace complexe $\mathbb{C}^N$ et la forme hermitienne :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f[k]\overline{g[k]}.$$

La famille des vecteur e_k :

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(e^{\frac{2i\pi}{N} 0 \cdot k}, \quad e^{\frac{2i\pi}{N} 1 \cdot k}, \quad \ldots, \quad e^{\frac{2i\pi}{N} (N-1) \cdot k} \right)$$

pour $k = 0, \ldots, N-1$ est une famille libre orthonormale (donc une base).

DFT : construction 2

Soit f un tableau de N nombres complexes. Comme $(e_0, e_1, \ldots, e_{N-1})$ est une base :

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} \langle f, e_j \rangle \, e_j$$

Les coordonnées de f dans la nouvelle base sont celles de la *DFT* de f.

DFT : expression

Expression

La transformée de Fourier discrète transforme un tableau f de N nombres complexes en un tableau $DFT(f)$ de même taille par l'opération suivante :

$$DFT(f)[k] = \langle f, e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-\frac{2i\pi}{N} jk}.$$

Interprétation physique

Le coefficient $DFT(f)[k]$ représente l'énergie du signal f à la fréquence k.

DFT : transformée inverse

Soit f un tableau de N nombres complexes. Comme $(e_0, e_1, \ldots, e_{N-1})$ est une base :

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} \langle f, e_j \rangle \, e_j$$

ou encore :

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j] \, e_j$$

DFT : transformée inverse

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j]\, e_j$$

$$f[k] = \left(\sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j]\, e_j \right)[k]$$

$$f[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j] e^{+\frac{2i\pi}{N}jk}$$

Notant $IDFT$ la transformée inverse ($IDFT \circ DFT = Id$) :

$$f[k] = IDFT(DFT(f))[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j] e^{+\frac{2i\pi}{N}jk}$$

DFT

Pour résumer, f un tableau de N nombres complexes :

Discrete Fourier Transform

$$DFT(f)[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-\frac{2i\pi}{N} jk}.$$

Inverse Discrete Fourier Transform

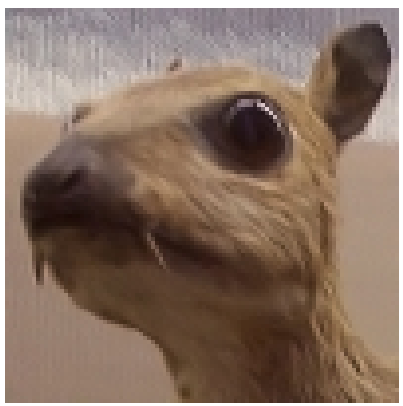
$$IDFT(g)[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} g[j] e^{+\frac{2i\pi}{N} jk}.$$

Pourquoi ?

Motivation

La transformée de Fourier transformes les convolutions (= opérations de filtrage) en multiplication. Il est bien plus rapide de faire une multiplication dans l'espace de Fourier qu'une convolution dans l'espace initial.

Input image



Convolution Kernel

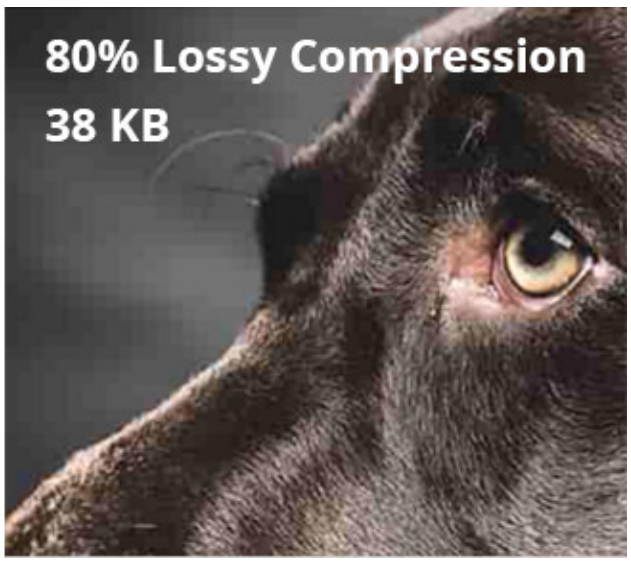
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Feature map

Pourquoi ?

Motivation

La transformée de Fourier transformes les convolutions (= opérations de filtrage) en multiplication. Il est bien plus rapide de faire une multiplication dans l'espace de Fourier qu'une convolution dans l'espace initial.



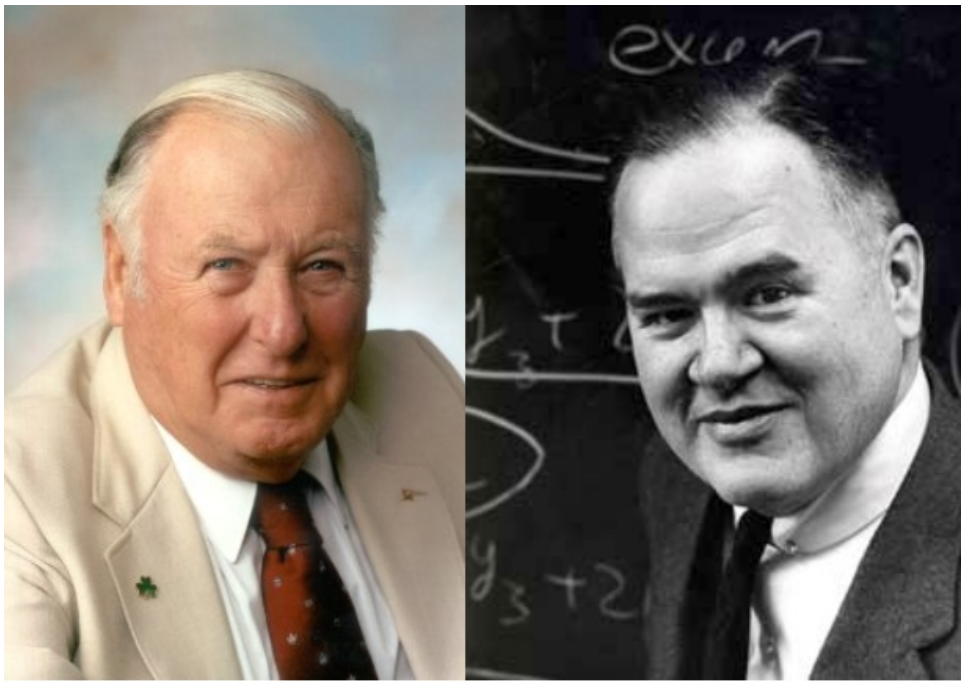
DFT : complexité a priori

$$DFT(f)[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-\frac{2i\pi}{N} jk}.$$

Calculer un terme : $O(N)$.

Calculer tous les termes : $O(N^2)$

Fast Fourier Transform



James William Cooley
(1926-)

John Wilder Tukey
(1915-2000)

La FFT est un algorithme introduit par Cooley and Tukey en 1965. Elle permet de calculer la DFT en temps $N \log(N)$.

Elle utilise une approche **diviser pour régner**.

FFT : algorithme

On sépare la somme dans la DFT en indices pairs et impairs :

$$\sqrt{N}\,DFT(f)[k] = \sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j]e^{-\frac{2i\pi}{N}(2j)k} + \sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j+1]e^{-\frac{2i\pi}{N}(2j+1)k},$$

dont on déduit facilement

$$\sqrt{N}\,DFT(f)[k] = \sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j]e^{-\frac{2i\pi}{N/2}jk} + e^{-\frac{2i\pi}{N}k}\sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j+1]e^{-\frac{2i\pi}{N/2}jk}.$$

FFT : algorithme

On retrouve en fait le calcul de la transformée de Fourier discrète sur les deux sous-tableaux :

$$\sqrt{N}DFT(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}}\left(DFT(f_{pair})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k}DFT(f_{impair})[k]\right) \tag{1}$$

où f_{pair} est le sous-tableau des indices pairs de f et f_{impair} est celui des indices impairs.

FFT : algorithme

Le problème est alors de :

1. Calculer la DFT des indices pairs de f.
2. Calculer la DFT des indices impairs de f.
3. Combiner en $O(N)$ les deux suivant la formule ci-dessus.

Complexité

Comme pour le tri fusion :

- calcul sur les tableau de taille $N/2$
- relation de récurrence $C(N) \approx N + 2 * C(\frac{N}{2})$
- complexité en $O(N \log(N))$

Implémentation

$$\sqrt{N}\, DFT(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}} \left(DFT(f_{0:2:N-2})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} DFT(f_{1:2:N-1})[k] \right)$$

Relation de récurrence :

1. Calculer la DFT des indices pairs de f.
2. Calculer la DFT des indices impairs de f.
3. Combiner en $O(N)$ les deux suivant la formule ci-dessus.

Implémentation

$$\sqrt{N}\, DFT(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}} \left(DFT(f_{0:2:N-2})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} DFT(f_{1:2:N-1})[k] \right)$$

Les sous DFT sont de longueur $N/2$, donc définies pour $0 \leq k \leq N/2$.

On utilise :

$$\exp(-\frac{2i\pi}{N/2} j(k + N/2)) = \exp(-\frac{2i\pi}{N/2} jk)$$

$$\exp(-\frac{2i\pi}{N}(k + N/2)) = \exp(-\frac{2i\pi}{N} k)$$

c'est-à-dire qu'il y a périodicité de la DFT :

$$DFT_{paire}[k + \frac{N}{2}] = DFT_{paire}[k],$$

$$DFT_{impaire}[k + \frac{N}{2}] = DFT_{impaire}[k] \quad .$$

Implémentation

$$\sqrt{N}\,DFT(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}}\left(DFT(f_{0:2:N-2})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} DFT(f_{1:2:N-1})[k]\right)$$

1. Calculer la DFT des indices pairs de f.
2. Calculer la DFT des indices impairs de f.
3. Combiner en $O(N)$ les deux suivant la formule ci-dessus.
   - Copier f dans un tableau temporaire `buffer`. On a dans les indices pairs et impairs les résultats des sous-DFT (non normalisées).
   - Boucle de $k = 0$ à $N/2 - 1$:

$$f[k] \leftarrow \texttt{buffer}[2 * k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k}\,\texttt{buffer}[2 * k + 1]$$
$$f[k + N/2] \leftarrow \texttt{buffer}[2 * k] - e^{-\frac{2i\pi}{N}k}\,\texttt{buffer}[2 * k + 1].$$

En pratique

- Le facteur $t_k = e^{-\frac{2i\pi}{N}k}$ est appelé *twiddle*. On en fait un calcul rapide par la relation de récurrence de suite géométrique $t_{k+1} = r\,t_k$, dont la raison $r = e^{-\frac{2i\pi}{N}}$ est pré-calculée.
- On alloue une seule fois `buffer` et on le passe dans les arguments de la fonction récursive.

Dérivation

Il est possible de définir un équivalent de dérivation pour la DFT.

Soit $e_j(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(\frac{2i\pi}{N} jx)$. Pour $k \in \mathbb{N}$: $e_j(k) = e_j[k]$

Soit f la fonction périodique :

$$f(x) = \sum_j DFT(f)[j] e_j(x),$$

et $f(k) = f[k]$:

$$f'(x) = \sum_j DFT(f)[j] e_j'(x) = \sum_j \frac{2i\pi j}{N} DFT(f)[j] e_j(x).$$

Puis :

$$DFT(f')[j] = \frac{2i\pi j}{N} DFT(f)[j].$$

Dérivation

Pour les fonctions réelles : il faut que f' soit réelle.

$$DFT(f')[j] = \begin{cases} \frac{2i\pi}{N} j\, DFT(f)[j] & \text{pour } 0 \leq j < N/2 \\ 0 & \text{pour } j = N/2 \\ \frac{2i\pi}{N}(j-N)\, DFT(f)[j] & \text{pour } N/2 < j < N \end{cases}$$

Cette relation est utile pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles. En particulier, l'équation de Poisson que nous allons résoudre en TP.

Plan de la séance

TP

TP long : transformée de Fourier rapide et éditeur de Poisson.

Idée

On veut copier/coller un morceau d'image dans une autre. Pour que les transitions soient naturelles, il faut que les variations d'intensité au niveau de la frontière soient égales : c'est l'équation de Poisson.

On la résout dans l'espace de Fourier, puis on récupère l'image lissée par transformée de Fourier inverse.