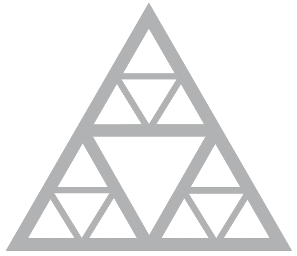
Algorithmique et structures de données

Algorithmes de tri

Nicolas Audebert

Mercredi 6 février 2019



École des Ponts
ParisTech

Plan de la séance

Les types de complexité

Deux complexités différentes

- La **complexité en temps** : le nombre d'opérations élémentaires constituant l'algorithme.
- La **complexité en espace** : le nombre de cases mémoires élémentaires occupées lors du déroulement de l'algorithme.

Complexités classiques (en temps)

- $0(1)$: accès aux éléments d'un tableau
- $0(\log n)$: recherche d'un élément dans une liste triée
- $0(n)$: parcours d'un tableau
- $0(n \log n)$: tris rapides
- $0(n^2)$: tris basiques
- $0(2^n)$: problèmes difficiles

Exemple : la suite de Fibonacci

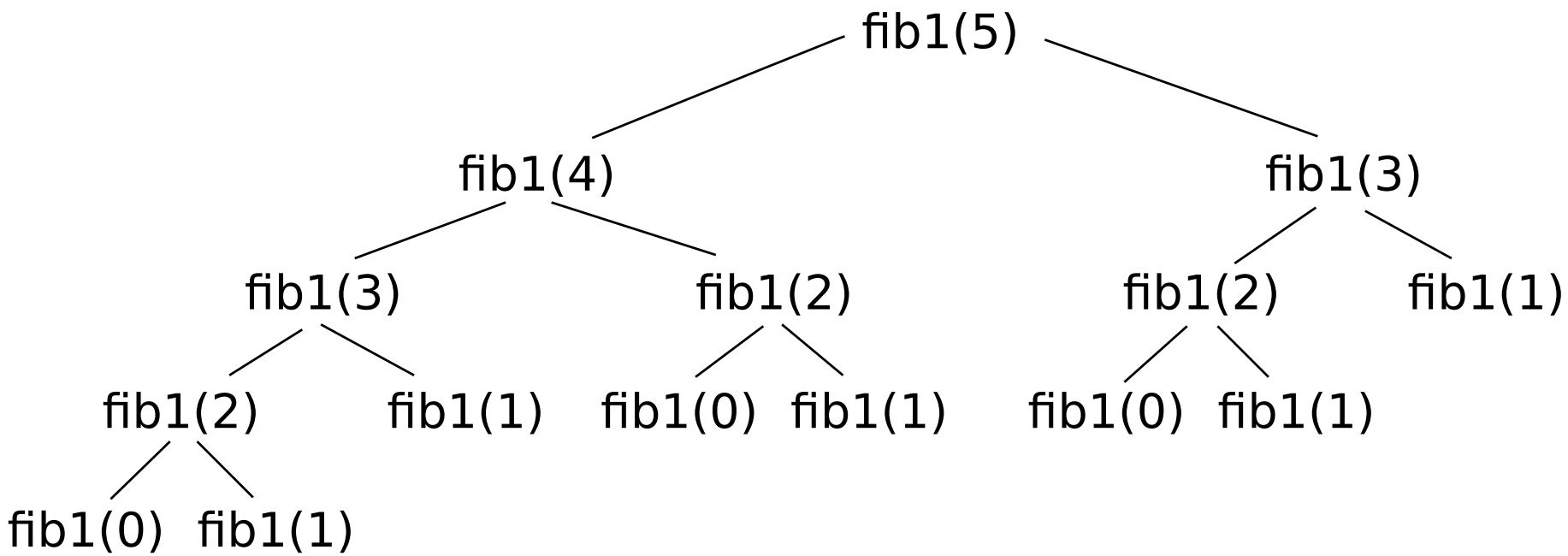
Dans le cours d'introduction au C++, on a vu deux méthodes pour trouver les termes de la suite de Fibonnacci :

$$\begin{cases} f_0 &= f_1 = 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

Exemple : la suite de Fibonacci

La formulation du problème incite à l'utilisation de la récursivité :

```
int fibonacci(int n){
    if (n < 2){
        return 1;
    } else {
        return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
    }
}
```



Exemple : la suite de Fibonacci

Opération élémentaire = addition ($+$).
La complexité se mesure ici en nombre d'additions (*i.e.* en nombre d'appels à la fonction).

- `fibonacci(0)` : 0
- `fibonacci(1)` : 0
- `fibonacci(2)` : 1
- `fibonacci(3)` : 2
- `fibonacci(4)` : 4
- `fibonacci(5)` : 7
- `fibonacci(6)` : 12
- `fibonacci(12)` : 20

Exemple : la suite de Fibonacci

Complexité en temps

Quelle est la complexité en temps de cet algorithme ?

En pratique…

Impossible à calculer pour des n grands.

Exemple : la suite de Fibonacci

Complexité en temps

Quelle est la complexité en temps de cet algorithme ?

Si A_n représente le nombre d'additions à faire au rang n :

$$\begin{array}{ccccc} 2 \times A_{n-2} & \leq & A_n & \leq & 2 \times A_{n-1} \\ 2^{\frac{n}{2}} & \leq & A_n & \leq & 2^n \end{array}$$

Ceci donne une complexité $C_{fibonacci}$ telle que :

$$O(2^{\frac{n}{2}}) \leq C_{fibonacci} \leq O(2^n)$$

En pratique...

Impossible à calculer pour des n grands.

Exemple : la suite de Fibonacci

Complexité en temps

Quelle est la complexité en temps de cet algorithme ?

Si A_n représente le nombre d'additions à faire au rang n :

$$\begin{array}{ccccc} 2 \times A_{n-2} & \leq & A_n & \leq & 2 \times A_{n-1} \\ 2^{\frac{n}{2}} & \leq & A_n & \leq & 2^n \end{array}$$

Ceci donne une complexité $C_{fibonacci}$ telle que :

$$O(2^{\frac{n}{2}}) \leq C_{fibonacci} \leq O(2^n)$$

En pratique...

Impossible à calculer pour des n grands.

Exemple : la suite de Fibonacci

Une seconde méthode, non récursive :

```
int fibonacci(int n){
    // Initialisation des deux premiers termes
    int fn_m2 = 1, fn_m1 = 1 ;
    for(int i=2; i <= n; i++) {
        int fn = fn_m2 + fn_m1
        // Décalage du rang n-1 au rang n
        fn_m2 = fn_m1;
        fn_m1 = fn;
    }
    return fnm1;
}
```

Exemple : la suite de Fibonacci

L'algorithme ainsi réécrit ne comporte qu'une seule boucle constituée uniquement d'opérations en temps constant.

La complexité $C_{fibonacci}$ est en $O(n)$.

Verdict

Le choix de la méthode d'implémentation peut beaucoup influer sur la performance.

Remarque

La récursivité n'est pas une mauvaise chose, elle est utile quand elle **recalcule pas** plusieurs fois le même résultat.

Plan de la séance

Complexité minimale

Théorème

La **complexité minimale** d'un algorithme de tri, d'une liste $\{a_1, a_2, ...a_n\}$ à valeur dans un **ensemble continu** ou de grand cardinal est $O(n \log n)$.

Complexité minimale : preuve

Propriétés d'un algorithme de tri

- Tout algorithme de tri peut se ramener à une succession de comparaisons et des transpositions (le nombre de comparaisons correspond ici à la mesure de complexité en temps).
- Tout algorithme de tri doit être capable de trier quelque soit la liste en entrée, *i.e.* il doit pouvoir envisager les $n!$ permutations possibles.

Complexité minimale : preuve - Arbre de tri

Lemme

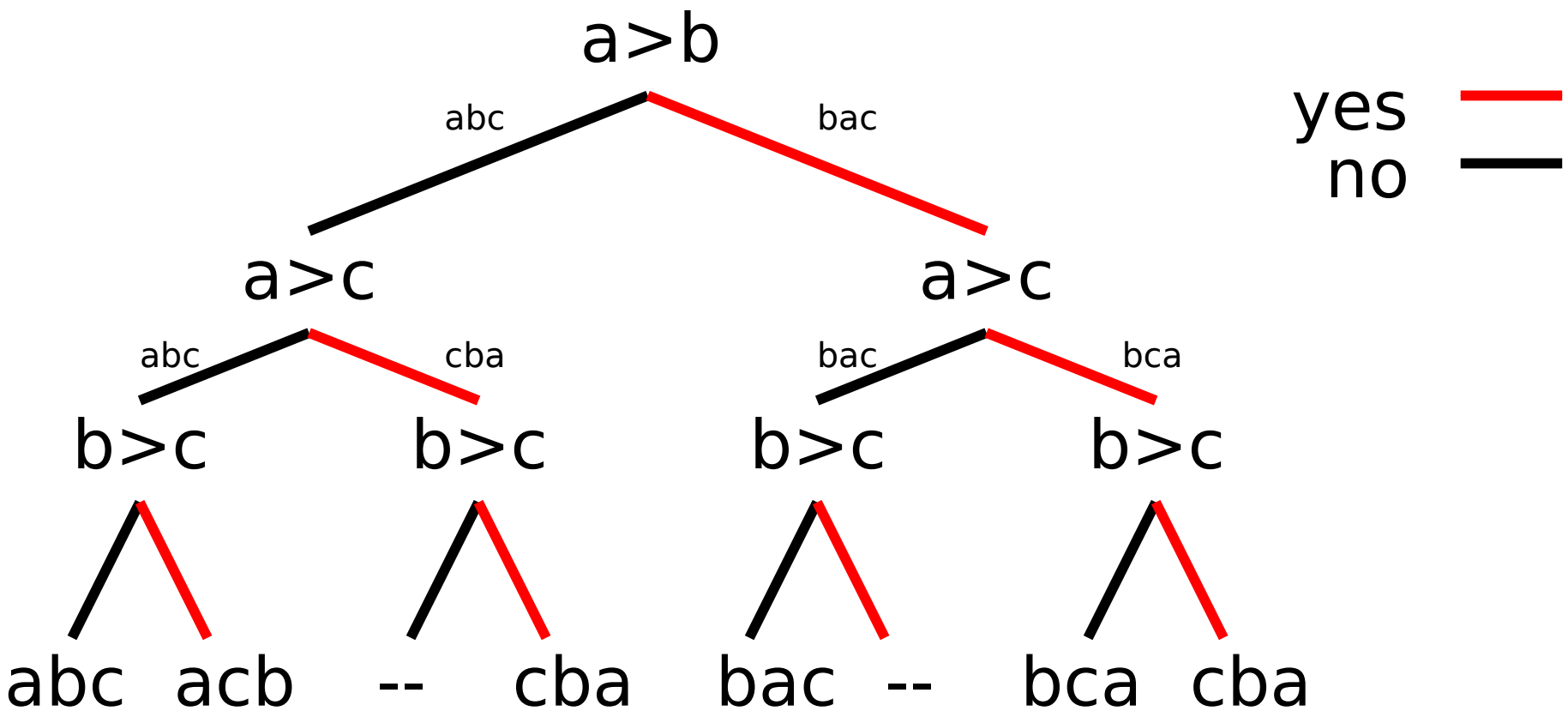
On peut représenter un algorithme de tri sous la forme d'un arbre où chaque noeud correspond à une comparaison, les arêtes aux résultats des comparaisons et chaque feuille à une permutation.

Conséquences

- L'arbre est un arbre binaire, il a 2^h feuilles, où h est la hauteur de l'arbre.
- L'arbre a au minimum $n!$ feuilles.
- La hauteur de l'arbre est le nombre de comparaisons nécessaires pour obtenir une liste triée.

Complexité minimale : preuve - Arbre de tri - Exemple

Exemple pour $n = 3$ et pour le tri à bulles : **abc**.



Complexité minimale

Chaque feuille de l'arbre soit vide, soit une des permutations possibles de la liste. Autrement dit, le nombre de permutations est inférieur au nombre de feuilles :

$$n! \leq 2^h$$

En utilisant la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$,

Finalement :

$$h = O(n \log n).$$

Complexité minimale

Chaque feuille de l'arbre soit vide, soit une des permutations possibles de la liste. Autrement dit, le nombre de permutations est inférieur au nombre de feuilles :

$$n! \leq 2^h$$

En utilisant la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$,

Finalement :

$$h = O(n \log n).$$

Complexité minimale : exemple

Exemple du calcul de l'histogramme d'une image.

```
int histo[256];
for(int i=0; i < 256; i++){
    histo[i] = 0;
}
for(int x=0; x < image.width(); x++){
    for(int y=0; y < image.height(); y++){
        histo[image(x,y)]++;
    }
}
```

Chaque pixel doit être observé au moins une fois : $O(n)$.
La complexité minimale n'est pas liée à l'implémentation mais à la tâche à effectuer.

Complexité minimale : exemple

Exemple du calcul de l'histogramme d'une image.

```
int histo[256];
for(int i=0; i < 256; i++){
    histo[i] = 0;
}
for(int x=0; x < image.width(); x++){
    for(int y=0; y < image.height(); y++){
        histo[image(x,y)]++;
    }
}
```

Chaque pixel doit être observé au moins une fois : $O(n)$.
La complexité minimale n'est pas liée à l'implémentation mais à la tâche à effectuer.

Remarque

Le théorème n'est valable que pour des tableaux à valeurs dans de grands ensembles.

Exercice

Proposer un algorithme de tri en $O(n)$ pour un tableau à valeurs dans un ensemble fini (de cardinal $k << n$).

Plan de la séance

Algorithmes quadratiques : tri à bulles

```
for(int i=n; i > 0; i--){
  for(int j=0; j < i-1; j++){
    if(t[j] > t[j+1]){
      swap(t[j], j[j+1])
    }
  }
}
```

Complexité

On fait $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ comparaisons. La complexité du tri à bulles est en $O(n^2)$ en moyenne et dans le pire des cas.

Autres algorithmes classiques

Tri par insertion et tri par sélection (cf. TP).

Algorithmes quadratiques : tri à bulles

```
for(int i=n; i > 0; i--){
  for(int j=0; j < i-1; j++){
    if(t[j] > t[j+1]){
      swap(t[j], j[j+1])
    }
  }
}
```

Complexité

On fait $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ comparaisons. La complexité du tri à bulles est en $O(n^2)$ en moyenne et dans le pire des cas.

Autres algorithmes classiques

Tri par insertion et tri par sélection (cf. TP).

Algorithmes quadratiques : tri à bulles

```
for(int i=n; i > 0; i--){
  for(int j=0; j < i-1; j++){
    if(t[j] > t[j+1]){
      swap(t[j], j[j+1])
    }
  }
}
```

Complexité

On fait $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ comparaisons. La complexité du tri à bulles est en $O(n^2)$ en moyenne et dans le pire des cas.

Autres algorithmes classiques

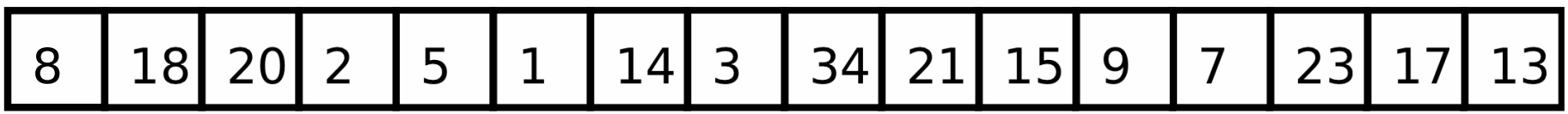
Tri par insertion et tri par sélection (cf. TP).

Plan de la séance

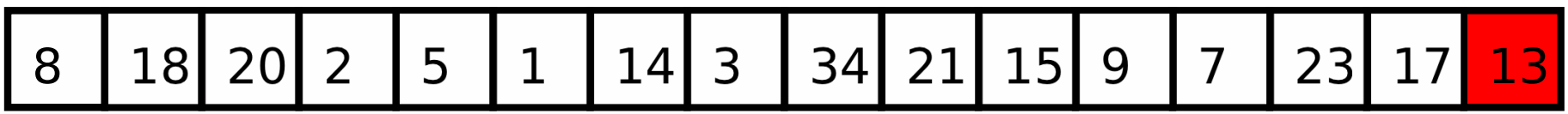
QuickSort : principe

1. Prendre un élément (le pivot) et le placer à la bonne position dans le tableau, de sorte qu'avant lui les éléments soient plus petits, et après lui plus grands.
2. Réitérer l'étape précédente sur chacune des parties du tableau.

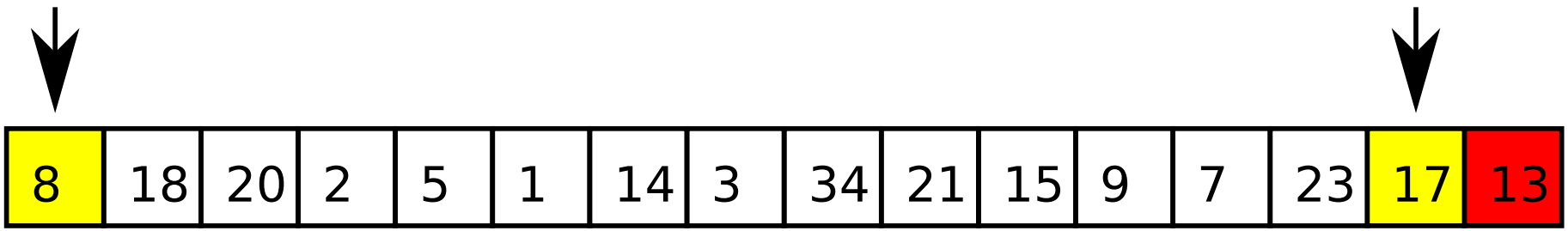
QuickSort : placer le pivot



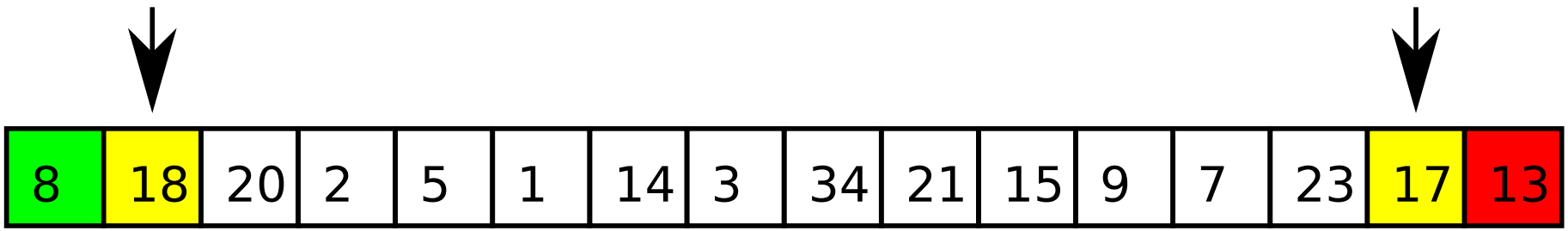
QuickSort : placer le pivot



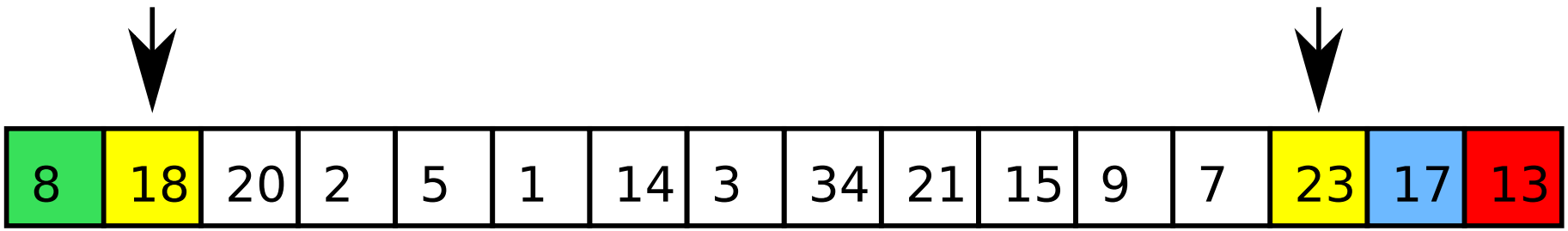
QuickSort : placer le pivot



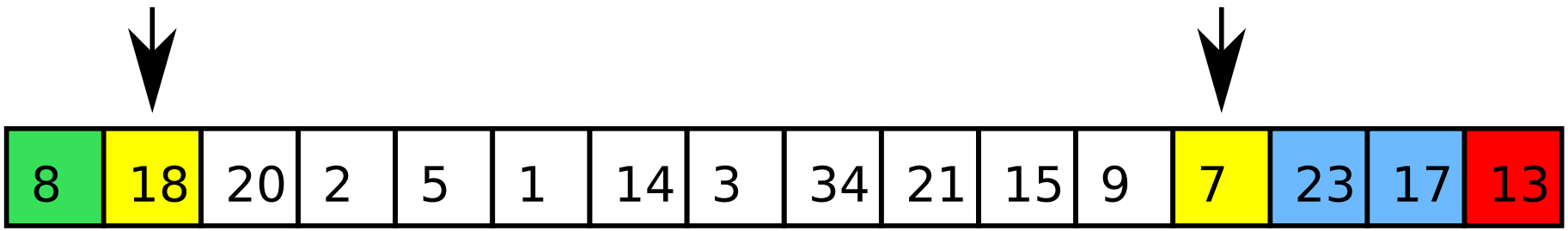
QuickSort : placer le pivot



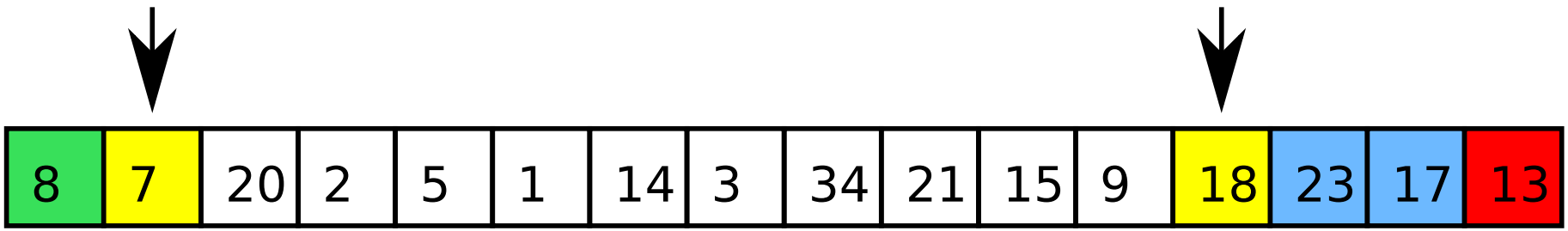
QuickSort : placer le pivot



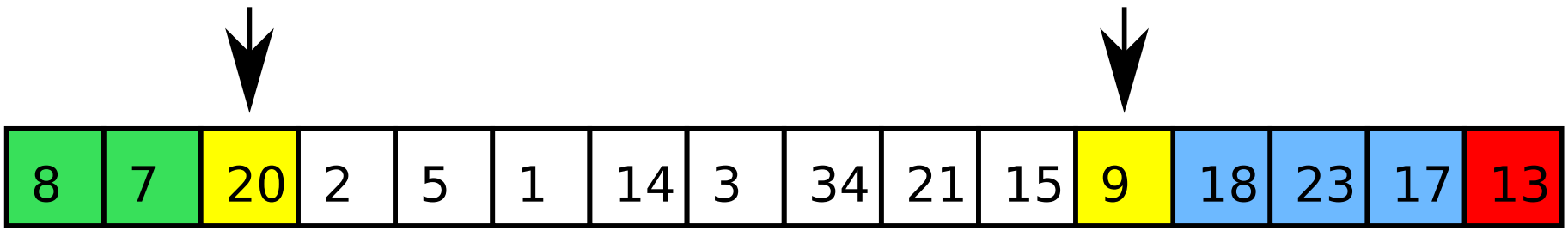
QuickSort : placer le pivot



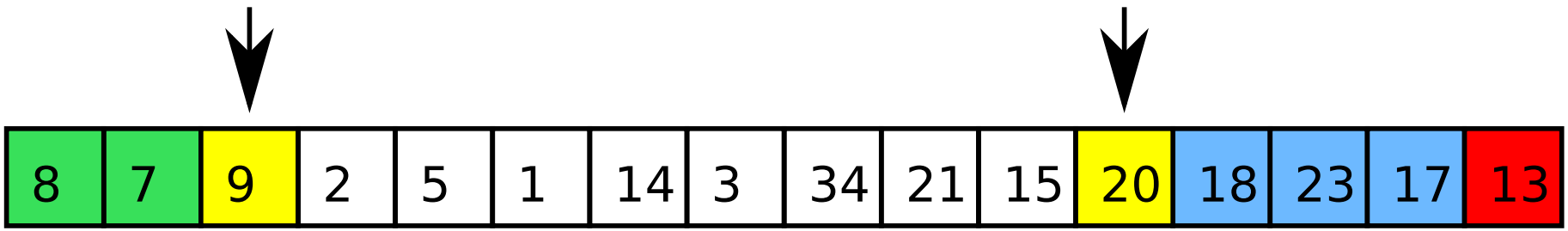
QuickSort : placer le pivot



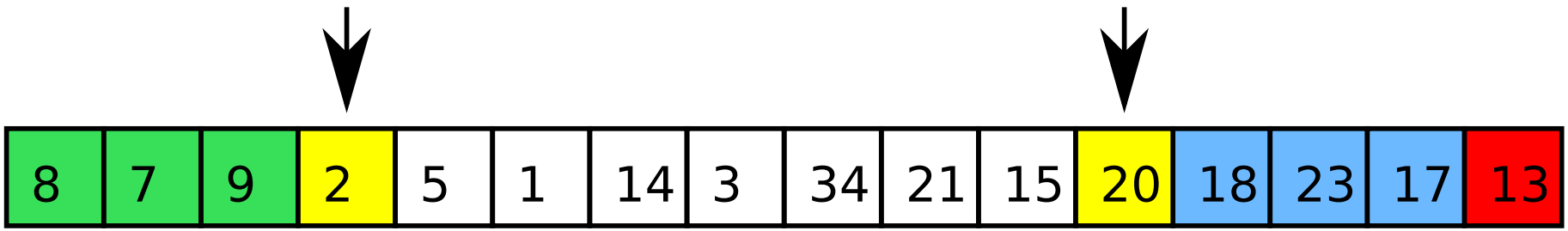
QuickSort : placer le pivot



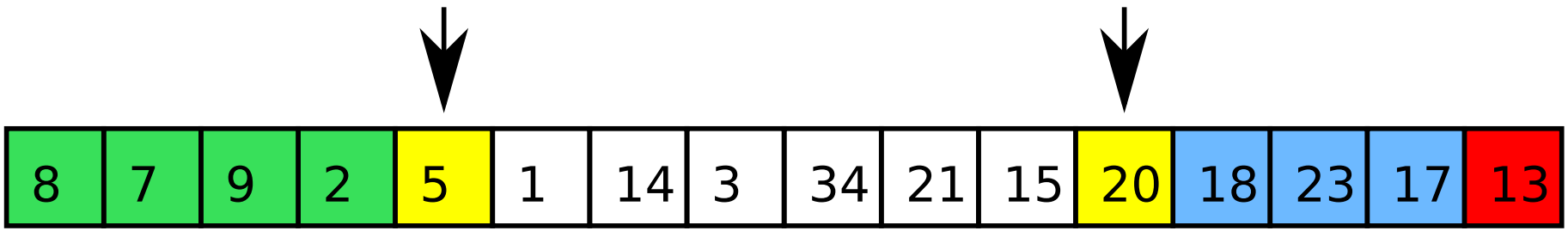
QuickSort : placer le pivot



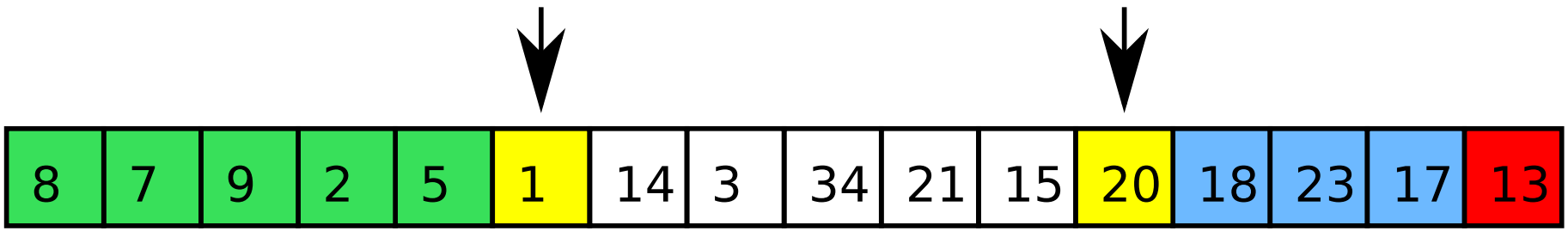
QuickSort : placer le pivot



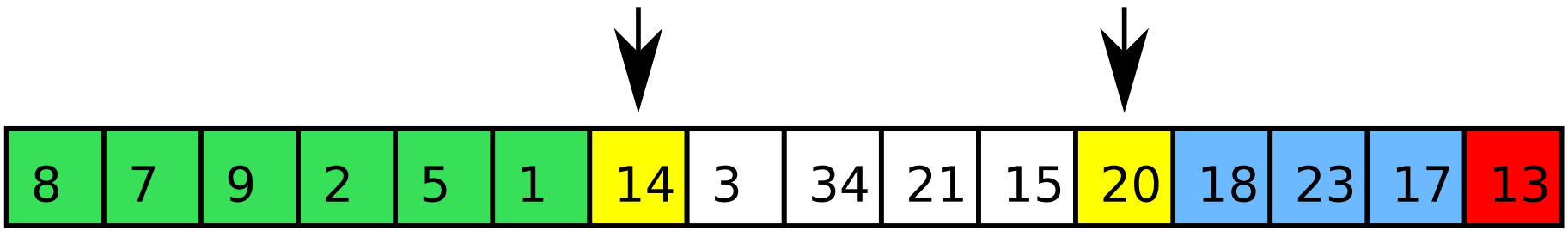
QuickSort : placer le pivot



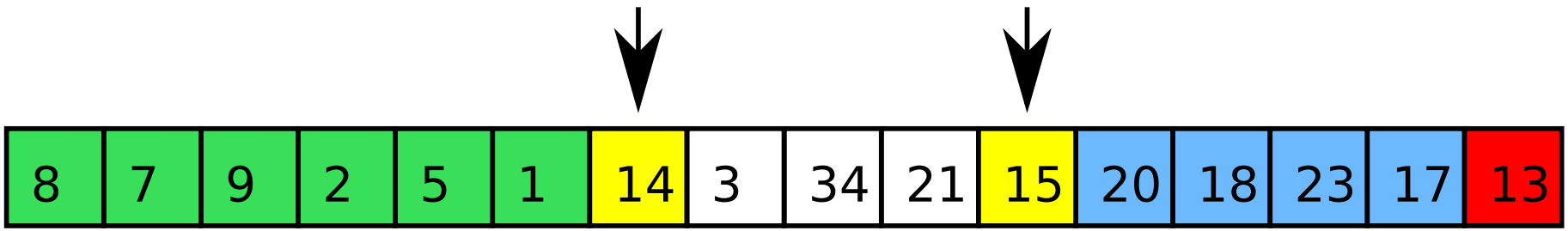
QuickSort : placer le pivot



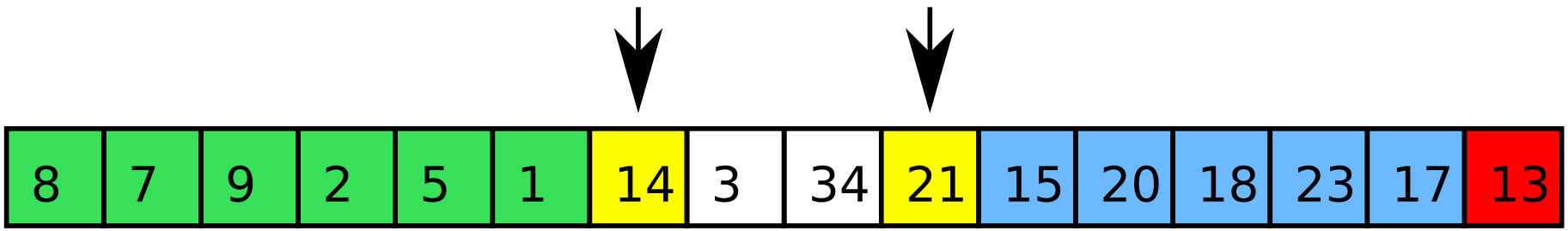
QuickSort : placer le pivot



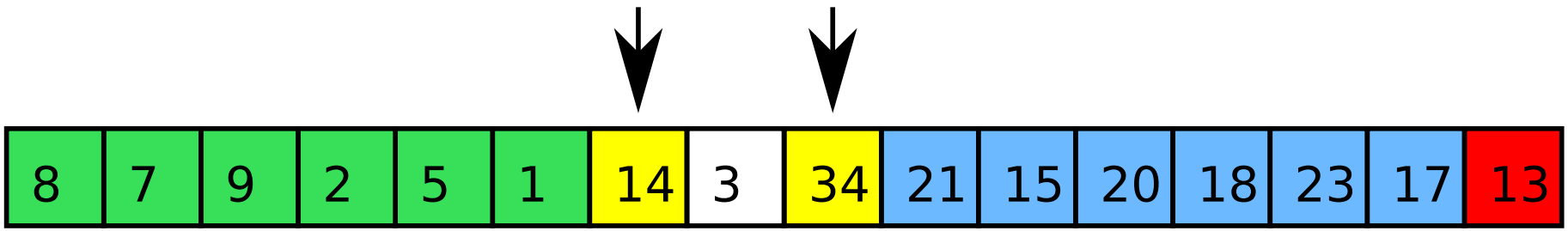
QuickSort : placer le pivot



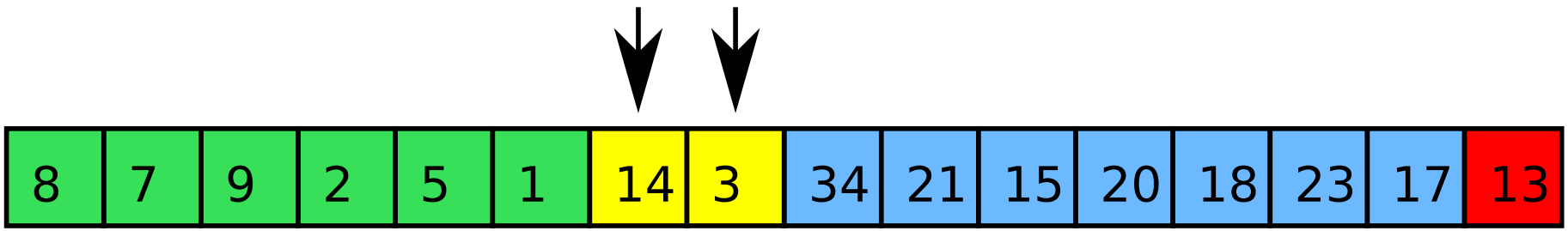
QuickSort : placer le pivot



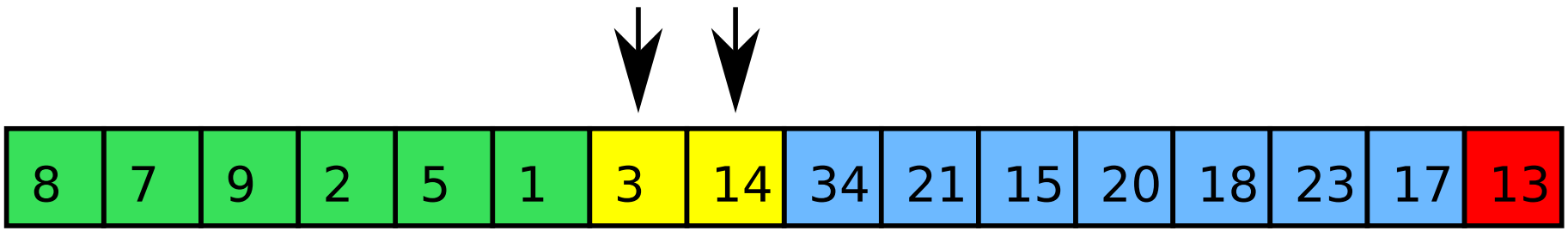
QuickSort : placer le pivot



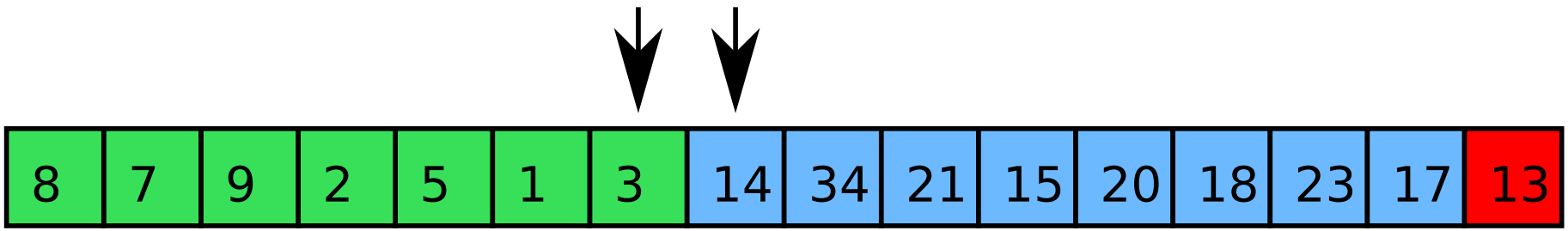
QuickSort : placer le pivot



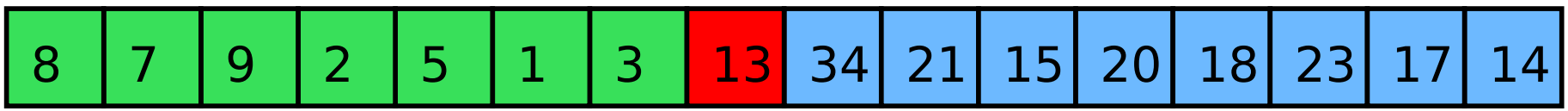
QuickSort : placer le pivot



QuickSort : placer le pivot



QuickSort : placer le pivot



Complexité de Quicksort

Quicksort est un tri en $O(n \log(n))$ **en moyenne**.

Démonstration dans le chapitre 3.

QuickSort : complexité - Pire des cas

Le parcours du tableau implique $n-1$ comparaison. Donc :

$$C_n = (n-1) + C_i + C_{n-i-1}$$

Si on suppose que $i = n-1$ (déjà triée) :

$$C_n = (n-1) + C_{n-2}$$

Au rang suivant :

$$C_n = (n-1) + (n-2) + C_{n-3}$$

En fait, cela revient à effectuer un tri à bulles :

$$C_n = O(n^2)$$

QuickSort : éviter le pire des cas

QuickSort tombe dans une complexité quadratique lorsque la liste est déjà triée, ou presque.

Pour éviter le pire des cas en moyenne on utilise généralement :

- un tirage du pivot au hasard
- un pivot au milieu du tableau
- un mélange de la liste au préalable

QuickSort : en pratique

- QuickSort est implémenté dans la STL (`#include <algorithm>`).
- Il existe des algorithmes en $n \log n$ quoi qu'il arrive (tri par tas, tri fusion, ...), mais il sont moins rapide **en moyenne**.

Plan de la séance

File de priorité

La file de priorité est une structure de données permettant :

- Accès à l'élément le plus prioritaire en $O(1)$
- Ajout d'un élément en $O(\log n)$
- Retrait d'un élément en $O(\log n)$

Étude au chapitre 4.

Tri par tas

Le tri par tas remplit une file de priorité et puis retire les éléments un par un.

```
void HeapSort(std::vector<double> &v){
  FilePriorite f;
  for(int i=0; i < v.size(); i++){
    f.push(v[i]);
  }
  for(int i=0; i < v.size(); i++){
    v[i] = f.pop();
  }
}
```

Conclusion

Le tri par tas est un tri en $O(n \log n)$ dans tous les cas. Cependant en comparaison à QuickSort, il utilise plus de mémoire et est plus long en moyenne.

En pratique c'est QuickSort le plus utilisé.

Tri par tas : complexités à retenir

- Tri : $O(n \log n)$
- Recherche dans un tableau trié : $O(\log n)$
- Recherche dans un tableau non trié : $O(n)$

Plan de la séance

Recherche dans un tableau non trié

Tableau non trié

Pas d'a priori sur la structure du tableau. Il faut regarder chaque élément.

Complexité

$$O(n)$$

Recherche dichotomique

Le fait de savoir que le tableau est trié permet de réduire la complexité de la recherche à $O(\log(n))$.

```
int dichotomie(const std::vector<double>& V, double val){
    int debut = 0, fin = v.size() - 1;
    while(debut < fin){
        int milieu = (debut + fin)/2;
        if(V[milieu] == val)
            return milieu;
        if(V[milieu] < val){
            debut = milieu + 1;
        } else {
            fin = milieu - 1;
        }
    }
    // On renvoie l'indice actuel si c'est la bonne valeur
    // ou -1 sinon car la valeur n'est pas dans le vecteur
    return (V[milieu] == val) ? a:-1;
}
```

TP

Algorithmes de tri.

TP alternatif

Pour ceux qui veulent voir autre chose.

Ne dispense pas de faire le TP #2.